

Električna merenja 1

9. Merni instrumenti III deo

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Sa stanovišta merenja, realne su dve kombinacije koje zavise od načina povezivanja kalemova.
 - 1) U prvom slučaju kalemovi se vezuju na red.
Kroz njih prolazi ista struja.
Ova kombinacija se koristi za merenje struja i napona.
 - 2) U drugom slučaju kalemovi se napajaju odvojeno,
jedan strujno, a drugi naponski, što omogućava merenje snage.
- ❖ Analiziraće se svaka od ove dve kombinacije vezivanja kalemova u slučaju napajanja jednosmernim i naizmeničnim naponima i strujama.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ U slučaju vezivanja **kalemova na red** i pri **merenju jednosmernih struja** važi:

$$I_1 = I_2 = I$$

$$M_a = k \cdot I_1 \cdot I_2 = k \cdot I^2$$

$$M_o = c \cdot \alpha$$

$$M_a = M_o$$

$$k \cdot I^2 = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{k}{c} \cdot I^2$$

- ❖ Vidi se da je **skretanje instrumenta funkcija kvadrata jednosmerne struje koja teče kroz oba kalema.**
- ❖ Prema tome, skala ovih instrumenata je kvadratna.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Kod merenja jednosmernih napona važi:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_v}$$
$$M_a = k \cdot \frac{U^2}{R_v^2}$$
$$M_o = c \cdot \alpha$$
$$M_a = M_o$$
$$k \cdot \frac{U^2}{R_v^2} = c \cdot \alpha$$
$$\alpha = \frac{k}{cR_v^2} \cdot U^2$$

❖ Skretanje instrumenta je funkcija kvadrata merenog napona.

❖ Skala je kvadratna.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ U slučaju vezivanja **kalemova na red** i kod napajanja **naizmeničnom strujom** važi:

$$i_1(t) = i_2(t) = i(t)$$

- ❖ Aktivni momenat je funkcija kvadrata struje:

$$m_a(t) = k \cdot i^2(t)$$

- ❖ Pošto kretni sistem zbog inercije ne može da prati promene momenta, on zauzima položaj određen srednjom vrednošću aktivnog momenta:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T k \cdot i^2(t) dt = k \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = k \cdot I_{ef}^2$$

- ❖ Srednja vrednost aktivnog momenta je funkcija efektivne vrednosti struje.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Za **merenje struje**, pri ravnoteži momenata dobija se:

$$\begin{aligned} M_{asr} &= M_o \\ c \cdot \alpha &= k \cdot I_{ef}^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \alpha = \frac{k}{c} \cdot I_{ef}^2$$

❖ Skretanje instrumenta je proporcionalno kvadratu efektivne struje. Skala je kvadratna.

❖ Kod **merenja napona** ima se:

$$i_1(t) = i_2(t) = \frac{u(t)}{R_v} \Rightarrow I_{ef} = \frac{U_{ef}}{R_v}$$

pa se analogno dobija:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T k \cdot \frac{u^2(t)}{R_v^2} dt = \frac{k}{R_v^2} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{k}{R_v^2} \cdot U_{ef}^2$$

❖ Srednja vrednost aktivnog momenta je funkcija kvadrata efektivne vrednosti napona.

❖ Pri ravnoteži momenata ima se:

$$\begin{aligned} M_{asr} &= M_o \\ c \cdot \alpha &= \frac{k}{R_v^2} \cdot U_{ef}^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \alpha = \frac{k}{c R_v^2} \cdot U_{ef}^2$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ U slučaju kada se **kalemovi napajaju odvojeno** ovi instrumenti mogu da se koriste za **merenje snage potrošača**.
- ❖ U slučaju **napajanja jednosmernom strujom**, struja nepokretnog kalema je struja potrošača, odnosno:

$$I_1 = I_p$$

dok je struja pokretnog kalema proporcionalna naponu potrošača:

$$I_2 = \frac{U_p}{R_i}$$

gde su: U_p napon potrošača, a R_i unutrašnji otpor pokretnog kalema.

- ❖ Aktivni momenat je sada:

$$M_a = k \cdot I_1 \cdot I_2 = k \cdot I_p \cdot \frac{U_p}{R_i} = \frac{k}{R_i} \cdot I_p \cdot U_p$$

$$M_a = \frac{k}{R_i} \cdot P$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Otporni momenat instrumenta je:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

❖ Izjednačavanjem momenata dobija se skretanje instrumenta:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_i} \cdot P$$

❖ Iz poslednjeg izraza jasno se vidi da **instrument meri snagu potrošača**.

❖ **Skala instrumenta je linearna**.

❖ Ako se **napajanje vrši naizmeničnom strujom**, struja nepokretnog kalema je struja potrošača:

$$i_1(t) = i_p(t)$$

dok je struja kroz pokretni kalem proporcionalna naponu potrošača:

$$i_2(t) = \frac{u_p(t)}{R_i}$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Aktivni momenat u ovom slučaju je:

$$m_a(t) = k \cdot i_p(t) \cdot \frac{u_p(t)}{R_i} = \frac{k}{R_i} \cdot p(t)$$

❖ Aktivni momenat je funkcija trenutne snage i menja se u vremenu.

❖ Kretni sistem ne može da prati brze promene aktivnog momenta zbog inercije i on se postavlja u položaj koji odgovara srednjoj vrednosti aktivnog momenta.

❖ Srednja vrednost aktivnog momenta je:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{R_i} p(t) dt$$

$$M_{asr} = \frac{k}{R_i} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{k}{R_i} \cdot P$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Otporni momenat instrumenta, kao i u prethodnim slučajevima, dat je relacijom:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

- ❖ Izjednačavanjem aktivnog i otpornog momenta dobija se skretanje instrumenta:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_i} \cdot P$$

- ❖ Vidi se da je u ovom slučaju **skretanje instrumenta proporcionalno aktivnoj snazi**.
- ❖ Instrument koji je realizovan kao vatmetar može da meri snagu i u jednosmernim i u naizmeničnim kolima.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Specijalan slučaj, kad su obe struje prostoperiodične (sinusoidalne) funkcije.

$$i_1(t) = I_{1m} \sin \omega t, I_{1m} = \sqrt{2}I_1$$

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t - \psi), I_{2m} = \sqrt{2}I_2$$

- ❖ U prethodnom izrazu ugao ψ je ugao faznog pomeraja između struja.
- ❖ Aktivni momenat je:

$$m_a(t) = k \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)$$

- ❖ Može se odrediti srednja vrednost aktivnog momenta:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T k i_1(t) i_2(t) dt$$

$$M_{asr} = \frac{k}{T} I_{1m} I_{2m} \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t - \psi) dt$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Pošto je:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \omega t \sin(\omega t - \psi) = \frac{1}{2} [\cos \psi - \cos(2\omega t - \psi)]$$

dobija se:

$$M_{asr} = \frac{k}{T} I_{1m} I_{2m} \frac{1}{2} \int_0^T [\cos \psi - \cos(2\omega t - \psi)] dt$$

❖ Sada je srednji momenat:

$$M_{asr} = \frac{k}{2T} \sqrt{2} I_1 \sqrt{2} I_2 \cos \psi \cdot t \Big|_0^T = \frac{k}{T} I_1 I_2 \cos \psi \cdot t \Big|_0^T$$

$$M_{asr} = k I_1 I_2 \cos \psi$$

$$\psi = S(\underline{I}_1, \underline{I}_2)$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Vidi se da je srednja vrednost aktivnog momenta, a samim tim i skretanje instrumenta, prorporcionalna proizvodu efektivnih vrednosti struja kroz kalemove i kosinusa ugla faznog pomeraja između njih.
- ❖ Ovo može da se iskoristi da se elektrodinamički instrument realizuje za merenje faktora snage ($\cos\varphi$).
- ❖ Iz dosadašnjih razmatranja, može se reći da elektrodinamički instrumenti mogu da se koriste za merenje:
 - jednosmerne i naizmenične struje i napona,
 - aktivne, a u određenoj konstrukcijskoj izvedbi, i reaktivne snage,
 - u odgovarajućoj izvedbi i faktora snage.

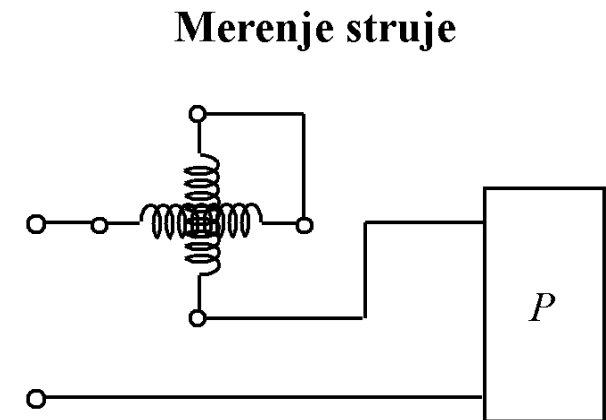
9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Kada se elektrodinamički instrument realizuje kao **ampermetar nepokretni i pokretni kalem se povezuju na red** kao što je prikazano na slici.
- ❖ Ranije je pokazano da skretanje instrumenta dato relacijom:

$$\alpha = \frac{k}{c} \cdot I^2$$

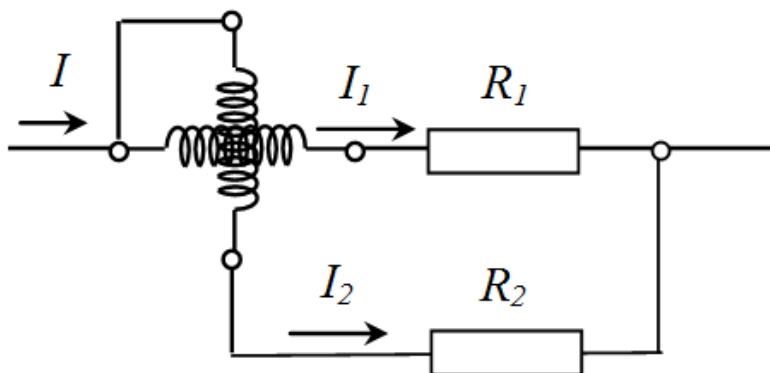
gde je I vrednost struje za jednosmernu struju, a efektivna vrednost za naizmeničnu struju.

- ❖ Ako je zadovoljan uslov da je $dM/d\alpha = \text{const}$,
- **skala instrumenta je kvadratna.**



9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Veza sa prethodne slike može se primeniti **samo za merenje malih struja**, do reda 0,2 A, zbog toga što struja prolazi kroz spiralne opruge kojim se dovodi na pokretni kalem. Zbog zagrevanja struja kroz njih ne sme biti veća.
- ❖ Za merenje većih struja formira se veza prikazana na sledećoj slici.



- Na red sa svakim kalemom vezan je otpornik.
- Otpori R_1 i R_2 podešavaju se tako da struja kroz pokretni kalem I_2 ne pređe vrednost dozvoljenu spiralnim oprugama.

➤ Tada je:

$$I_1 = a_1 \cdot I$$

$$I_2 = a_2 \cdot I$$

- pri čemu mora biti:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$I_1 + I_2 = I$$

9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Kod merenja jednosmerne struje, skretanje instrumenta je sada:

$$\alpha = k \cdot a_1 \cdot I \cdot a_2 \cdot I = k \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot I^2$$

- ❖ Skretanje instrumenta je proporcionalno kvadratu merene struje.
- ❖ Kod merenja naizmeničnih struja mora se ostvariti i uslov da su **struje u paralelnim granama u fazi**.

To se svodi na uslov da mora biti:

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$$

odnosno da su **vremenske konstante grana jednake**.

9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Osnovne metrološke karakteristike elektrodinamičkih ampermetara su:
 - merenje jednosmernih i naizmeničnih struja od 10 mA do 10 A, maks. 1 kHz,
 - izražen je uticaj stranog magnetnog polja,
 - sopstvena potrošnja ovog instrumenta je relativno velika (nekoliko VA),
 - klase tačnosti su od 0.05 do 0.2.

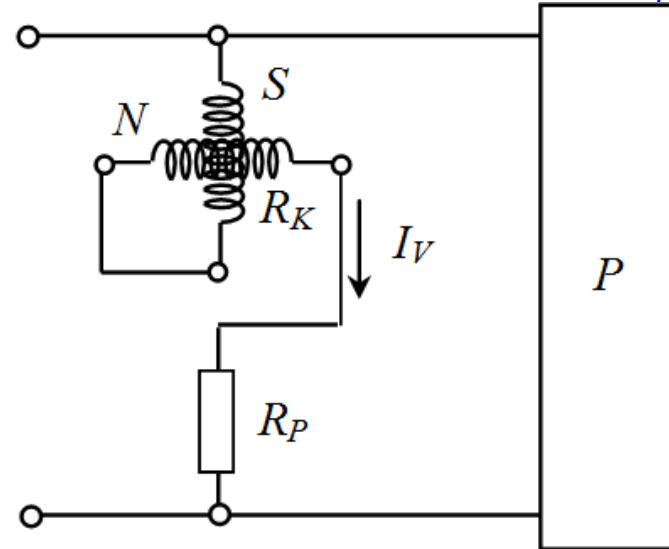
9.6.2 Elektrodinamički voltmetar

❖ Kalemovi se vezuju na red, a na red sa njima dodaje se veliki otpor R_p .

❖ Ukupan otpor je sada:

$$R_v = R_k + R_p$$

gde je R_k ukupan otpor redno vezanih kalemova.



❖ Za jednosmerne struje skretanje voltmetra je:

$$\alpha = \frac{k}{cR_v^2} \cdot U^2$$

a za naizmenične struje:

$$\alpha = \frac{k}{cR_v^2} \cdot U_{ef}^2$$

gde je U_{ef} efektivna vrednost naizmeničnog napona.

9.6.2 Elektrodinamički voltmetar

- ❖ Bez obzira na prirodu struje skala voltmetra je kvadratna.
- ❖ Za niske frekvencije (reda 50 Hz) kolo je zbog velikog R_p pretežno omsko.
- ❖ Za visoke frekvencije dolazi do izražaja induktivnost kalemova (struja nije u fazi sa naponom) i to dovodi do greške u merenjima.
 - Ta pojava se može kompenzovati ako se pored R_p na red doda i kapacitet C .
- ❖ Otpornik R_p , pored ograničenja struja kroz kalemove, vrši i ulogu kompenzacije uticaja promene temperature na otpor kalemova.

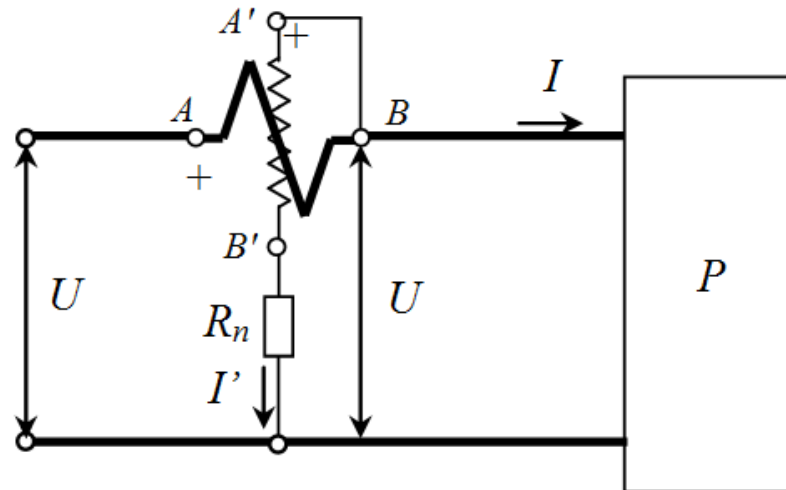
9.6.2 Elektrodinamički voltmetar

❖ Osnovne metrološke karakteristike elektrodinamičkih voltmetara su:

- merenje jednosmernih i naizmeničnih napona od 5 V do 600 V, maks. 1 kHz,
- uticaj stranog magnetnog polja je jako izražen,
- sopstvena potrošnja ovog instrumenta je relativno velika (od 1 VA do 10 VA),
- klase tačnosti su od 0.05 do 0.2.

9.6.3 Elektrodinamički vatmetar

- ❖ Elektrodinamički instrumenti su pogodni za direktno merenje aktivne snage, kao vatmetri.
- ❖ Kod takve primene kalemovi se vezuju kao što je prikazano na slici.



- ❖ Struja kroz nepokretni kalem je struja potrošača. Ovaj kalem se naziva i *strujni kalem*.
- ❖ Struja kroz pokretni kalem I' je proporcionalna naponu potrošača U . Ovaj kalem se naziva i *naponski kalem*.
- ❖ Na red sa pokretnim kalemom vezan je veliki otpor da bi struja kroz njega bila što manja.

9.6.3 Elektrodinamički vatmetar

- ❖ Struja kroz naponski kalem je:

$$I' = \frac{U}{R_w}$$

gde su: R_w otpor jednak zbiru otpora pokretnog kalema R_k i dodatnog otpora u naponskom kolu R_n , odnosno $R_w = R_k + R_n$.

- ❖ Važe sva izvođenja od ranije, pa je za jednosmernu struju skretanje instrumenta:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_w} P$$

- ❖ Za naizmeničnu struju skretanje instrumenta je takođe:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_w} P$$

gde je P aktivna snaga.

9.6.3 Elektrodinamički vatmetar

- ❖ Prethodni izraz može da se napiše i u drugačijoj formi:

$$P = \frac{c \cdot R_w}{k} \alpha = k_w \cdot \alpha$$

gde je k_w konstanta vatmetra.

- ❖ Konstanta vatmetra može da se izračuna preko izraza:

$$k_w = \frac{U_{ops} \cdot I_{ops}}{\alpha_{max}} (\cdot \cos \varphi_n)$$

gde su: U_{ops} - naponski opseg vatmetra,

I_{ops} - strujni opseg vatmetra,

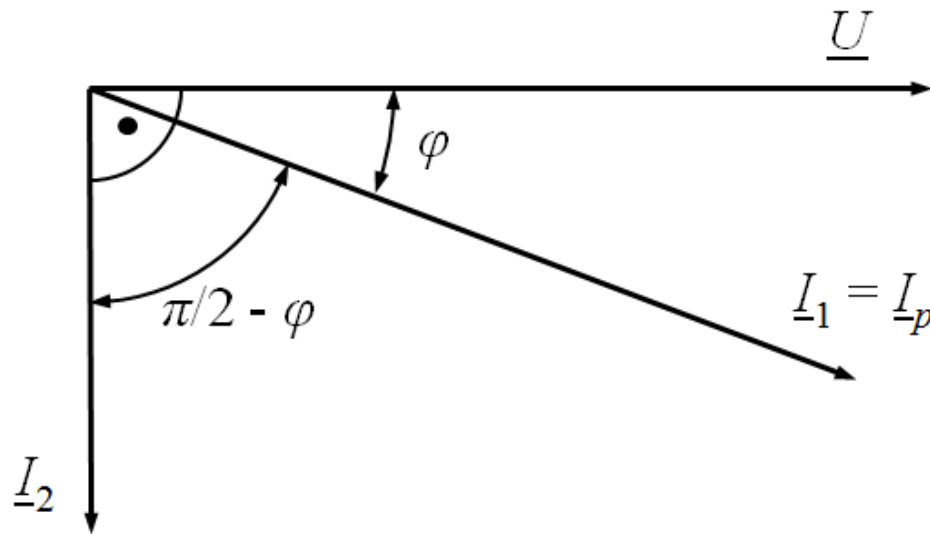
α_{max} - maksimalno skretanje vatmetra,

$\cos \varphi_n$ - faktor snage vatmetra.

- ❖ Faktor snage je podatak koji se daje u specifikaciji instrumenta.
- ❖ Obično je ova vrednost jednaka 1 ako nije drugačije naznačeno.

9.6.4 Elektrodinamički varmetar

- ❖ Elektrodinamički instrumenti se mogu koristiti i za direktno merenje reaktivne snage, kao varmetri.
- ❖ Da bi se to postiglo potrebno je da se obezbedi da struja kroz naponsko kolo instrumenta kasni za naponom potrošača za ugao $\pi/2$.



$$S(\underline{U}, \underline{I}_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$S(\underline{I}_1, \underline{I}_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

9.6.4 Elektrodinamički varmetar

❖ Sa vektorskog dijagrama se vidi da je

ugao između vektora struja nepokretnog kalema I_1 i pokretnog kalema I_2 jednak $\pi/2 - \varphi$, pa je sada srednja vrednost aktivnog momenta:

$$M_{asr} = kI_1I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$M_{asr} = kI_1I_2 \sin \varphi$$

❖ Neka je:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_p$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}'}$$

gde su:

I_p - struja potrošača,

U - napon potrošača, a

Z' - impedansa naponskog kola.

9.6.4 Elektrodinamički varmetar

- ❖ Za srednju vrednost aktivnog momenta dobija se:

$$M_{asr} = kI_p \frac{U}{Z'} \sin \varphi$$

- ❖ Pošto je:

$$Q = UI_p \sin \varphi$$

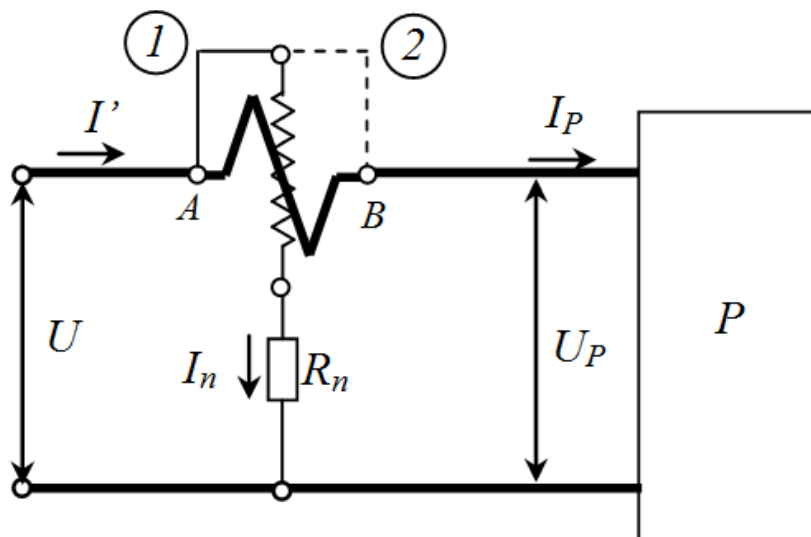
tada je:

$$M_{asr} = \frac{k}{Z'} Q$$

- ❖ Uslov da struja kroz naponsko kolo instrumenta kasni za naponom potrošača za ugao $\pi/2$ zove se „*uslov kvadrature*” i
- ostvaruje se konstruktivno tako što se u naponsko kolo umesto otpornika vezuje dodatna induktivnost.

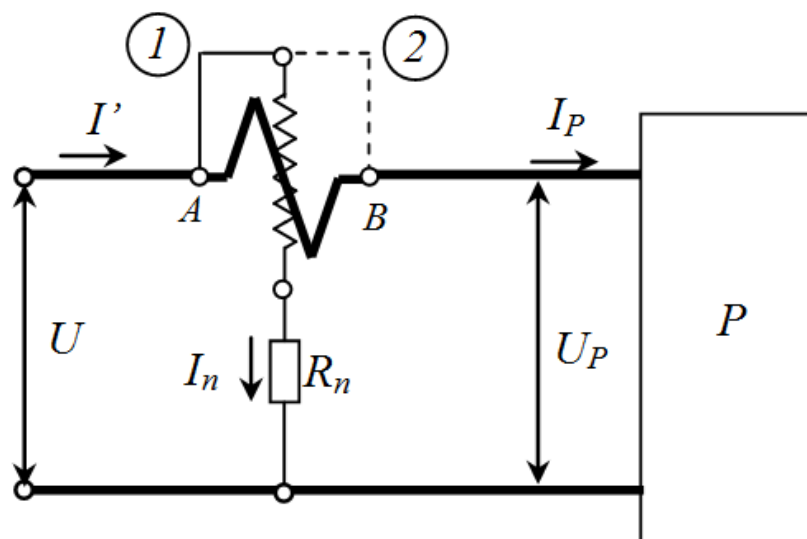
9.6.5. Sistematska greška pri merenju snage vatmetrom

- ❖ Pri merenju snage vatmetrom moguće su dve veze, koje su prikazane na slici.



- ❖ Razlika kod povezivanja je u mestu vezivanja naponskog kola vatmetra.
- ❖ **1-** naponsko kolo se vezuje na ulaz strujnog kola vatmetra (na slici je prikazano punom linijom).
- ❖ **2-** naponsko kolo se vezuje na izlaz strujnog kola vatmetra (na slici je prikazano isprekidanom linijom).

9.6.5. Sistematska greška pri merenju snage vatmetrom



- ❖ U vezi 1, naponsko kolo meri zbir napona na strujnom klemu i napona na potrošaču, a snaga koju meri vatmetar je:

$$P' = k_w \cdot \alpha$$

P - snaga potrošača,

$$P' = P + P_s$$

P_s - potrošnja strujnog kola.

- ❖ U vezi 2, strujno kolo meri zbir struje potrošača i struje kroz naponski kalem vatmetra. Tada je snaga koju meri vatmetar:

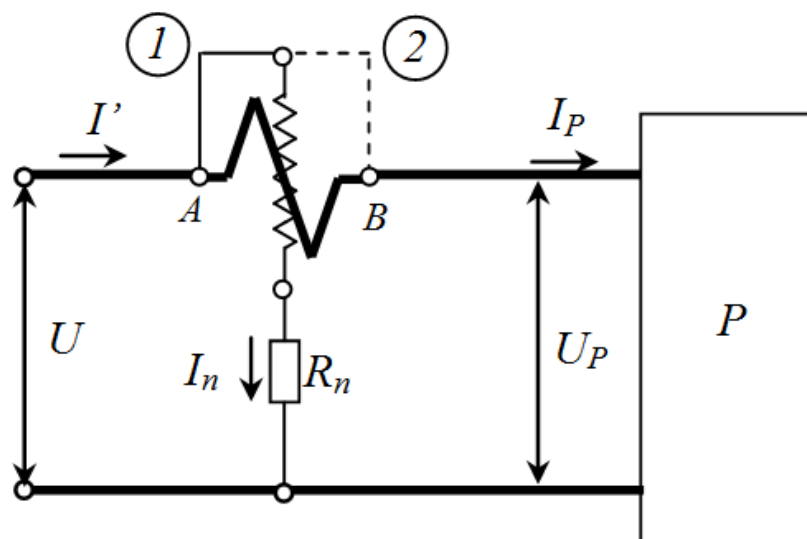
$$P' = k_w \cdot \alpha$$

P - snaga potrošača,

$$P' = P + P_n$$

P_n - potrošnja naponskog kola.

9.6.5. Sistematska greška pri merenju snage vatmetrom



- ❖ U oba slučaja snaga koju pokazuje vatmetar je veća od snage potrošača, što znači da je **sistematska greška uvek pozitivna**.
- ❖ Mogu se koristiti obe veze.
- ❖ U praksi se više koristi veza 2 pošto je **moguće tačnije odrediti potrošnju naponskog kola** jer se otpor naponskog kola može tačnije odrediti. Tada je:

$$P_n = \frac{U^2}{R_n} \rightarrow P = P' - P_n = k_w \cdot \alpha - \frac{U^2}{R_n}$$

- ❖ Strujno kolo ima mali otpor i veliki je uticaj spojnih veza, pa je taj otpor teže odrediti.

9.6.6. Elektrodinamički instrumenti - Zaključak

- ❖ Pomoću ovih instrumenata se meri napon, struja i snaga u kolima jednosmerne i naizmenične struje.

Ampermetri

- mere struje, jednosmerne i efektivne vrednosti naizmeničnih,
- promena mernog opsega - pošto je nepokretni kalem iz dva dela, oni se mogu vezivati na red ili u paralelu,
- rednim povezivanjem dobija se niži opseg, a paralelnim viši opseg.

Voltmetri

- mere napon jednosmerni i efektivnu vrednost naizmeničnog,
- promena mernog opsega - dodavanjem predotpora.

Vatmetri

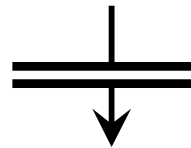
- merenje snage u kolima jednosmerne i naizmenične struje,
- može se menjati naponski opseg (kao kod voltmetra) i strujni opseg (kao kod ampermetra).

9.6.6. Elektrodinamički instrumenti - Zaključak

- ❖ Granična učestanost merenog signala je do reda 10 kHz, ali se koriste uglavnom do 1 kHz.
- ❖ Klase tačnosti - do 0.05 i 0.1 za laboratorijske,
0.2 i 0.5 za prenosne laboratorijske instrumente i
1.0 za industrijske instrumente.
- ❖ Skale - kod ampermetara i voltmetara kvadratne, a kod vatmetara linearne.
- ❖ Vrednosti indukcije su male, reda 10 mT, pa se javlja jak uticaj stranih polja. Uticaji se otklanjaju oklopljavanjem instrumenta ili astatičkom konstrukcijom.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Elektrostatički instrumenti zasnivaju rad na dejstvu sile u električnom polju.
- ❖ Ovi instrumenti se isključivo koriste za merenje napona.
- ❖ Simbol elektrostatičkih instrumenata dat je na slici.



- ❖ Osnovni merni deo ovog instrumenata je kondenzator kod koga je jedna elektroda nepokretna, a druga pokretna i na sebi nosi kazaljku.
- ❖ Pod dejstvom elektrostatičke sile dolazi do zakretanja pokretne elektrode i pomeranja kazaljke.

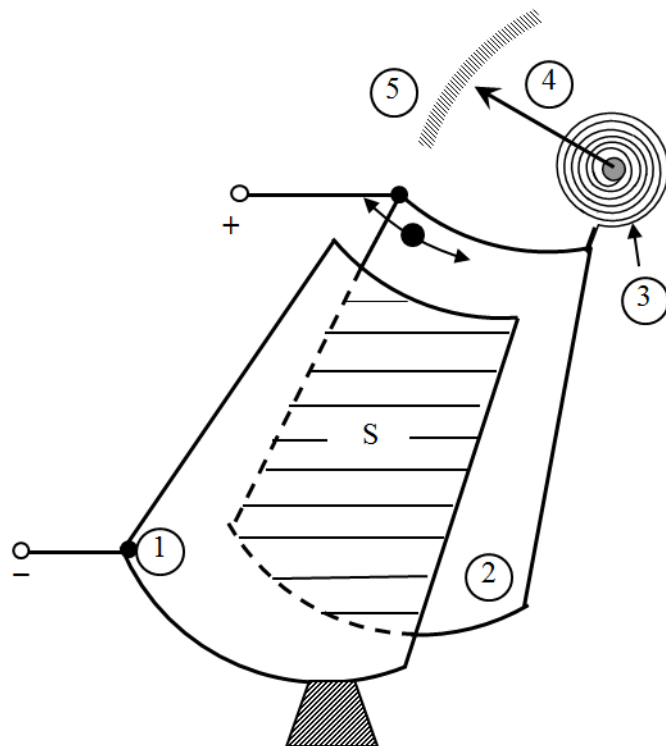
9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ Prema konstrukciji postoje dva osnovna tipa.

1. Tip sa uvlačenjem pokretne ploče

- Pod dejstvom elektrostatičke sile pokretna ploča teži da se u što većoj meri prekrije nepokretnom pločom (da bi kapacitet bio što veći, što veća energija).

- Pokretna ploča je vezana spiralnom oprugom koja stvara otporni momenat, a i napaja se preko nje.



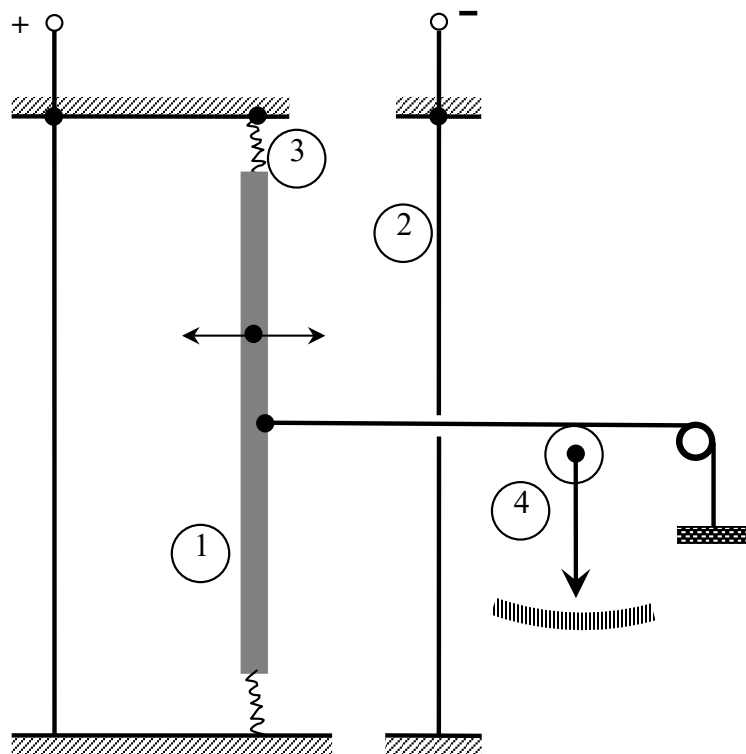
- 1 - nepokretna ploča
- 2 - pokretna ploča
- 3 - spiralna opruga
- 4 - kazaljka
- 5 - skala

❖ Ovaj tip instrumenta koristi se za merenje jednosmernih i naizmeničnih napona do 500 (1000) V.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

2. Tip kod koga se pod dejstvom elektrostaticke sile menja razmak između ploča

- Instrument radi na principu promene razmaka između elektroda.



- 1 - pokretna elektroda
- 2 - nepokretna elektroda
- 3 - opruge
- 4 - kazaljka

❖ Ovaj tip instrumenta koristi se za merenje vrlo visokih napona i do 600 kV.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Za oba tipa elektrostatičkog instrumenta biće izvedena zavisnost zakretanja pokretne ploče od napona.
- ❖ Kod **provg tipa**, zakretanjem pokretne ploče za ugao $d\alpha$ pod dejstvom kretnog momenta M_a , ostvaruje se mehanički rad:

$$dW_{meh} = M_a \cdot d\alpha$$

- ❖ Ovaj rad je jednak promeni elektrostatičke energije sistema:

$$dW_{meh} = dW_{el}$$

- ❖ Elektrostatička energija sistema je:

$$W_{el} = \frac{1}{2} u^2(t) \cdot C$$

gde su: $u(t)$ - priključeni napon, a
 C - kapacitet sistema.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Pošto vrednost priključenog napona ne zavisi od ugla zakretanja, tada je aktivni momenat:

$$M_a = \frac{dW_{meh}}{d\alpha} = \frac{dW_{el}}{d\alpha}$$

$$M_a = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{2} u^2(t) \cdot C \right]$$

$$M_a = \frac{1}{2} u^2(t) \frac{dC}{d\alpha}$$

- ❖ Konstruktivnim oblikovanjem ploča može se realizovati da bude:

$$\frac{dC}{d\alpha} = const$$

odnosno da se kapacitet sistema menja linearno od ugla zakretanja

$$C = k_c \alpha + C_o$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ Prema tome aktivni momenat je sada dat izrazom:

$$M_a = \frac{1}{2} u^2(t) \cdot k$$

❖ Otporni momenat stvara spiralna opruga pa je:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

❖ Kod merenja **jednosmernih napona** ima se:

$$u(t) = U$$

$$M_a = \frac{1}{2} U^2 \cdot k$$

$$M_o = c \cdot \alpha$$

$$M_a = M_o$$

$$\frac{1}{2} k U^2 = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{k}{c} U^2 = k' \cdot U^2$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Kod merenja **naizmeničnih napona** aktivni momenat je funkcija trenutne vrednosti napona:

$$m_a(t) = \frac{k}{2} u^2(t)$$

- ❖ **Kretni sistem** ne može pratiti trenutne promene zbog inercije i **postavlja se u položaj koji odgovara srednjoj vrednosti momenta**. Tada je:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{2} u^2(t) dt$$

$$M_{asr} = \frac{k}{2} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{k}{2} U_{ef}^2$$

gde je U_{ef} efektivna vrednost merenog napona.

- ❖ Pri ravnoteži momenata dobija se:

$$M_{asr} = M_o$$

$$\frac{1}{2} k U_{ef}^2 = c \cdot \alpha, \text{ odnosno } \alpha = \frac{1}{2} \frac{k}{c} U_{ef}^2$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Kod **drugog tipa** instrumenta razmatranja su slična, samo je sada **pomeraj linijski**, a ne kružni kao kod prethodnog tipa. Uloženi rad je:

$$dW_{meh} = F_x dx$$

gde su: F_x elektrostatička sila pod čijim se dejstvom pomera pokretna ploča, a dx pomeraj ploče.

- ❖ Promena elektrostatičke energije sistema je:

$$dW_{el} = \frac{1}{2} u^2(t) dC$$

- ❖ Promena uloženog rada jednaka je promeni elektrostatičke energije, pa je:

$$dW_{meh} = dW_{el}$$

$$F_x dx = \frac{1}{2} u^2(t) dC$$

$$F_x = \frac{1}{2} u^2(t) \frac{dC}{dx}$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Kretanju sistema suprostavlja se sila opruge:

$$F_o = c \cdot x$$

- ❖ Pri ravnoteži je:

$$F_x = F_o$$

$$\frac{1}{2}kU^2 = c \cdot x$$

$$x = \frac{k}{2c}U^2 = k'U^2$$

- ❖ Kao što se vidi zavisnost skretanja je opet kvadratna.

- ❖ Proširenje mernog opsega ovih instrumenata vrši se primenom otporničkih i kapacitivnih delila napona.

9.7.1. Proširenje mernog opsega

- ❖ Otporničko delilo koristi se i za jednosmerne i za naizmenične napone. Šema otporničkog delila prikazana je na slici.

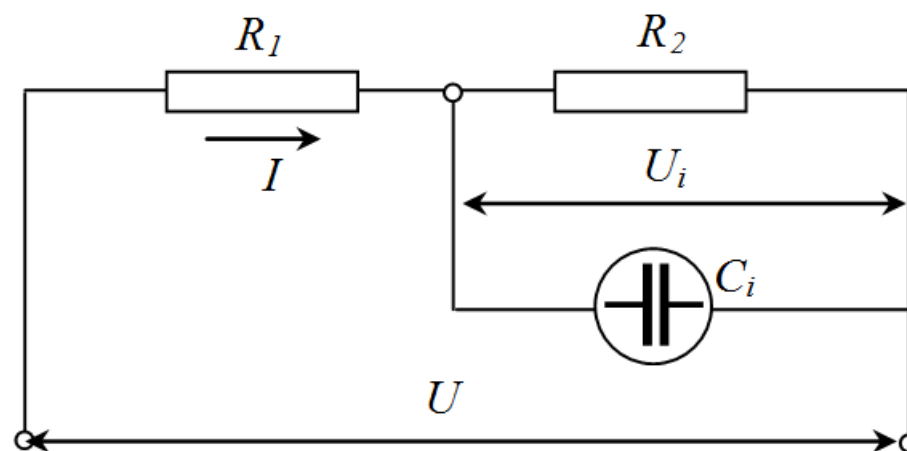
- ❖ Za jednosmernu struju

- odnos merenog napona U i napona na instrumentu U_i je:

$$\frac{U}{U_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

- ❖ gde je:

$$R_1 \gg R_2$$



- ❖ Primenom delila mogu se meriti znatno veći naponi.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

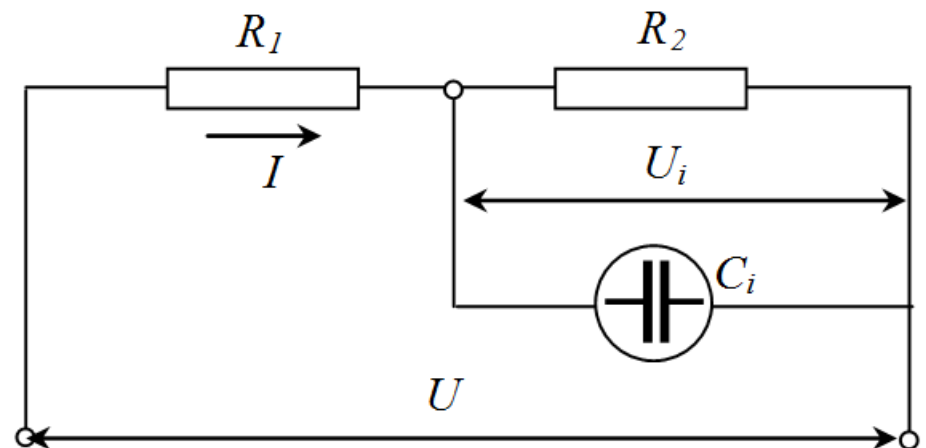
❖ Za naizmeničnu struju važi:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_e}{\underline{Z}_e} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e}$$

❖ Sa slike se vidi da je:

$$\underline{Z}_1 = R_1$$

$$\underline{Z}_e = R_2 \parallel C_i = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_i}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_i}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_i}$$



❖ Količnik napona je sada:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e} = 1 + \frac{R_1}{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_i}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + j\omega R_1 C_i$$

❖ Pošto se traže moduli, tada je:

$$\frac{U}{U_i} = \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega R_1 C_i)^2}$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ Pošto je kapacitet instrumenta mali može se smatrati da je:

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 \gg (\omega R_1 C_i)^2$$

❖ Tako da se dobija da je:

$$\frac{U}{U_i} \cong 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

❖ Ovo pogotovo važi za industrijske učestanosti.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

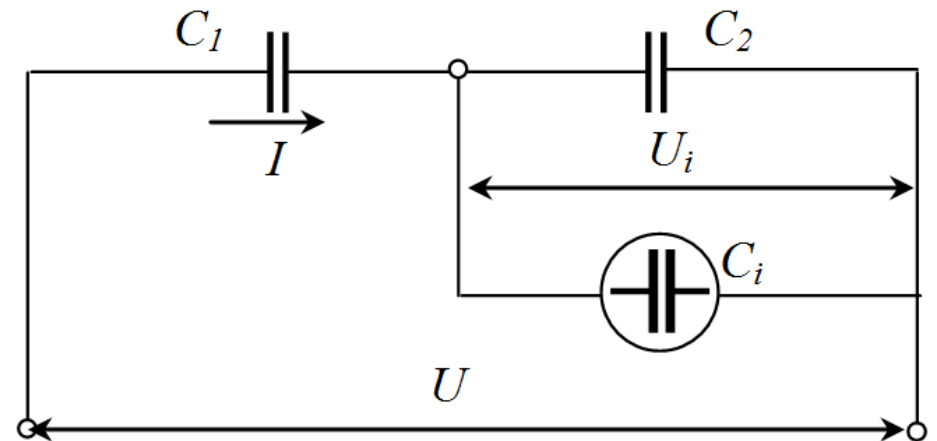
- ❖ Kapacitivno delilo napona koristi se samo za naizmenične napone.
- ❖ Šema kapacitivnog delila data je slici.

- ❖ U ovom slučaju dobija se:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_e}{\underline{Z}_e} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\underline{Z}_e = C_2 \parallel C_i = \frac{1}{j\omega(C_2 + C_i)}$$



$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = 1 + \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega(C_2 + C_i)}} = 1 + \frac{C_2 + C_i}{C_1}$$

- odnos napona ne zavisi od frekvencije.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ U praksi je kapacitet delila mnogo veći od kapaciteta instrumenta, odnosno:

$$C_i \ll C_1, C_2$$

❖ U tom slučaju se dobija:

$$\frac{U}{U_i} = 1 + \frac{C_2}{C_1}$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Vidi se da kod **kapacitivnog delila** nema uticaja učestanosti na tačnost delila.
- ❖ Elektrostatički instrumenti mogu meriti napone do vrlo visokih učestanosti.
- ❖ Granična učestanost je određena maksimalnom vrednošću struje koja je dozvoljena za instrument (spiralna opruga).
- ❖ Za dozvoljenu struju I_d , merni opseg U i ako je kapacitet instrumenta C_i dobija se:

$$\underline{I} = j\omega C_i U$$

$$I_{\max} = I_d = \omega_{gr} C_i U \Rightarrow f_{gr} = \frac{I_d}{2\pi C_i U}$$

gde C_i odgovara kapacitetu pri punom naponu.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Na kraju će biti date neke **opšte metrološke karakteristike elektrostatičkih mernih instrumenata**.
- ❖ **Sopstvena potrošnja** elektrostatičkih instrumenata je **veoma mala**, pa su pogodni za primenu u kolima gde se ne sme opteretiti merno kolo.
- ❖ Kako se **kapacitivnost elektrostatičkih instrumenata** kreće u opsegu od **nekoliko pF do nekoliko desetina pF** oni imaju **relativno malu frekvencijsku zavisnost**, pa se mogu upotrebljavati za merenje naizmeničnog napona frekvencije do 50 MHz.
- ❖ Instrumenti se uglavnom izrađuju kao industrijski instrumenti **klase tačnosti od 1 do 2.5**.
Međutim, u **laboratorijskoj verziji** moguće je postići **klasu tačnosti 0.2**.

Hvala Vam na pažnji